Degrés de complexité en géométrie et en musique réflexions à partir de l'*Harmonie du Monde* de Kepler

Athanase Papadopoulos

Résumé : Le but de cet article est de mettre en valeur certaines des idées géométriques de Johannes Kepler, et de les relier à des considérations sur la consonance musicale, considérations qui découlent d'une lecture attentive de son traité l'*Harmonie du Monde*.

Mots-clés : Kepler - Harmonices Mundi - Harmonie du Monde - Consonance musicale - Constructions à la règle et au compas - Polygones réguliers - Complexité - Scibilité.

Introduction

Il est toujours bon de commencer par citer les auteurs anciens. Jamblique, le biographe syrien de Pythagore du IIIème siècle après J. C., décrivant le moment où Pythagore fit sa découverte merveilleuse de la relation entre les intervalles musicaux et les fractions numériques, écrit ([4] §115 p. 66) :

> « *Alors que* Pythagore *était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelqu'instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dioptre [...]* »

La mention de la règle et du compas dans ce texte n'est pas une pure fantaisie. Je pense qu'elle indique qu'une relation entre les constructions géométriques à la règle et au compas et celle des intervalles musicaux consonants était connue intuitivement dans l'antiquité grecque. Plus de deux mille ans après Pythagore, Johannes Kepler revient sur ce thème, en y consacrant une partie importante de son traité majeur, l'*Harmonie du Monde*. Dans cet article, je vais tenter de donner plusieurs éclairages à cette relation, en exposant certaines idées de Kepler contenues dans l'*Harmonie du Monde*, en les reliant à d'autres idées sur le même sujet.

Je commence par quelques mots sur l'ouvrage de Kepler.

L'*Harmonie du Monde (Harmonices Mundi)*, écrit en 1619, est un traité sur les quatre sujets du *quadrivium* pythagoricien : géométrie, arithmétique, astronomie et musique. Ce traité occupe, à divers titres, une place centrale dans le patrimoine mondial des idées. Par exemple, c'est là où Kepler énonce la loi, que nous appelons maintenant la « troisième loi de Kepler », qui dit que pour une planète quelconque du système solaire, le carré de sa période de révolution autour du soleil divisé par le cube de sa distance moyenne au soleil est une constante (rappelons que c'est Newton qui plus tard a découvert la nature de cette constante).

D'un point de vue purement mathématique, le traité de Kepler contient une partie géométrique, écrite dans la pure tradition d'Euclide, concernant la construction de figures à l'aide de la règle et du compas. Cette partie n'a rien perdu de son intérêt, et elle pourrait servir de base pour un cours s'adressant à des étudiants d'aujourd'hui. Dans le même traité, Kepler aborde d'autres questions de géométrie, dont certaines, qui étaient complètement nouvelles et originales à leur époque, gardent aujourd'hui encore toute leur actualité. Je pense ici aux considérations sur le « degré de congruence » des polygones et des polyèdres, considérations qui conduisent à des questions qui aujourd'hui ne sont pas encore résolues. Certaines idées de Kepler contenues dans l'*Harmonie du Monde* mènent à des développements de la théorie des pavages qui ont été l'objet de recherches intenses durant les dernières décennies, souvent sans que leurs auteurs se rendent compte que Kepler en était à l'origine. En fait, la plupart des idées mathématiques contenues dans l' *Harmonie du Monde*, retranscrites en langage moderne, pourraient être incluses (avec très peu de changements) dans un traité moderne de géométrie et de topologie, et à divers titres, je pense qu'il n'est pas exagéré de dire que Kepler est l'un des fondateurs de la topologie[1]. Je vais commencer par exposer ces idées, avant de parler de consonance musicale.

Note sur la traduction. J'ai utilisé la traduction française de l'*Harmonices Mundi*, due à Jean Peyroux (Librairie A. Blanchard, Paris, 1977). Cette traduction est difficile à lire, parfois même inintelligible, mais elle a au moins le grand mérite d'exister. Parlant de traductions, il faut mentionner que la majeure partie de l'œuvre de Kepler (écrite en latin) n'a pas encore été traduite en français (ni d'ailleurs dans une autre langue). L'Edition Frisch de ses Oeuvres Complètes comprend près de 6000 pages de texte, qui certainement sont intéressantes à des degrés divers, et la partie qui a été traduite en français se résume à peu de livres, dont l'*Harmonices Mundi*, l'*Epitome Astronomiae Copernicanae*, traduite aussi par J. Peyroux (Librairie A. Blanchard, Paris, 1988), le *Mysterium Cosmographicum*, traduit par Alain Segonds (éd. belles Lettres, Paris 1894) et certains autres. La traduction en anglais de l'*Harmonices Mundi* est parue il y a seulement une dizaine d'années (trad. E.J. Aiton, A.M. Duncan & J.V. Fields American Philosophical Society, 1977), ce qui est aussi un signe de la lenteur du processus de traduction. Kepler attachait une grande valeur à la traduction de textes scientifiques. Travailleur infatigable, il a entrepris lui-même une traduction en latin de l'*Harmonique* de Ptolémée, traduction qu'il pensait initialement inclure comme supplément à son *Harmonices Mundi*[2]. Sa traduction du Livre III du traité de l'*Harmonique* est contenue dans l'édition Frisch de ses Oeuvres Complètes (Volume V de [5], p. 345-412). Rappelons aussi que la première traduction complète de l'*Harmonique* de Ptolémée a été faite par un mathématicien, John Wallis (1616-1703). Cette traduction constitue, en même temps que celles du *Commentaire sur l'Harmonique de* Ptolémée de Porphyre (3ème siècle après J. C.), de l'*Harmonique* du musicologue byzantin Manuel Briennius ainsi que de certains ouvrages d'Archimède, Eudoxe, Pappus et Aristarque de Samos, le Volume III des Oeuvres Complètes de Wallis, éditées en trois volumes à Oxford (1693-1699). Notons enfin, puisqu'on parle de

[1]Rappelons que René Thom considérait que la topologie en tant que domaine des mathématiques remonte même à l'antiquité grecque.

[2]Il est intéressant de noter que malgré le fait que Ptolémée a été le principal responsable pour l'adoption par le monde civilisé, pendant plus de 1300 ans, d'un système astonomique géocentrique, Kepler, qui fut l'un des premiers astronomes modernes à adopter le système héliocentrique, se réfère constamment dans ses écrits à l'autorité de Ptolémée, pour qui il exprime explicitement son admiration dans l'appendice du Livre V de l'*Harmonie du Monde*. Il est peut-être bon de rappeler aussi que les théories astronomiques pythagoriciennes étaient plus souvent héliocentriques que géocentriques (cf. en particuler les théories de Philolaus et d'Aristarque de Samos ; voir par exemple [11] Vol. II p. 3).

traductions, que KEPLER a travaillé à une traduction commentée en allemand du chapitre XIII du Livre II d'ARISTOTE *de Caelo*, et que cette traduction est publiée dans ses Oeuvres Complètes ([5] Vol. VII p. 733-750).

FIG. 1 – Johannes KEPLER, tenant dans sa main une règle et un compas.

1. Géométrie : Le degré de scibilité et le degré de congruence d'un polygone régulier

Le Livre I de l'*Harmonie du Monde* est entièrement consacré à des questions de *scibilité*, c'est-à-dire (suivant la terminologie de KEPLER) de constructions à la règle et au compas, tandis que le Livre II de cet ouvrage est consacré à des questions de *congruence*, c'est-à-dire (toujours suivant la terminologie de KEPLER) de pavages d'une surface par des polygones réguliers, ou d'un espace tri-dimensionnel par des polyèdres réguliers de dimension trois. Le mot scibilité est une traduction du mot *scibilitas* utilisé par KEPLER, que l'on pourrait aussi traduire par *connaissance*. L'idée derrière le choix de ce mot est le fait que l'on peut « voir », ou « connaître », une figure si et seulement si on peut la construire à l'aide de la règle et du compas. Une telle conception est assez courante chez les géomètres (voir par exemple Hartshorne [3]). On verra ci-après plusieurs formes précises que peut prendre la notion de scibilité dans le cas particulier d'un polygone régulier. Le mot latin utilisé par Kepler qui est traduit par congruence est *congruencia*.

Les notions de scibilité et de congruence munissent l'ensemble des polygones réguliers de deux relations d'ordre que l'on va considérer plus en détail dans ce qui suit, celles induites par le *degré de scibilité* et le *degré de congruence*.

Le degré de scibilité d'un polygone inscriptible dans un cercle est une mesure de la difficulté avec laquelle on peut construire ce polygone à l'aide de la règle et du compas.

Le degré de congruence d'un polygone est une mesure de la difficulté de ce polygone à s'associer avec d'autres polygones (qui peuvent lui être isométriques ou pas) pour former un pavage du plan ou d'une surface plus générale.

On va parler en détail et successivement de scibilité et de congruence.

Dans le Livre I de son *Harmonie du Monde*, Kepler entreprend une étude systématique de la question de savoir si un polygone régulier du plan est constructible ou non à la règle et au compas. Bien sûr, Kepler n'est pas le premier à avoir soulevé cette question. En effet, il est bien connu que la constructibilité des polygones a occupé une grande place chez les géomètres de l'antiquité grecque, qui l'ont étudiée pour elle-même, mais aussi en relation avec d'autres problèmes célèbres, tels que ceux de la trisection d'un angle, de la quadrature du cercle et de la duplication du cube.[3] On rappelle à titre d'exemple que le premier résultat du Livre I des *Eléments* d'Euclide est celui de la construction du triangle équilatéral à la règle et au compas. Il est bien connu aussi que les problèmes de construction à la règle et au compas ont intéressé toutes les générations de géomètres après Kepler. Par exemple, le titre du Livre I de la *Géométrie* de Descartes est : « *Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites* ».

Kepler a introduit dans cette étude géométrique une idée dynamique très importante, et qui paraît de nos jours encore très moderne ; c'est celle de *degré de scibilité* (ou de constructibilité).

Il y a plusieurs manières de rendre précise la notion de degré de scibilité d'une figure. L'une des premières qui vient à l'esprit consiste à définir ce degré comme le nombre minimum d'opérations nécessaires à la construction de cette figure. Ici, une « opération » consiste à prendre la règle ou bien le compas, à tracer une ligne ou un arc de cercle, et puis à poser l'instrument. Le nombre minimum d'opérations qui est nécessaire à la construction d'une figure est une certaine mesure de la complexité de cette figure. Par exemple, on peut construire un triangle équilatéral à l'aide des cinq opérations suivantes : on construit un segment AB à l'aide de la règle ; on construit à partir de A, puis de B, un cercle de rayon

[3]Par exemple, on sait que le polygone régulier à 9 côtés n'est pas constructible à la règle au compas, alors que le polygone régulier à trois côtés l'est. Or, si l'on savait trisecter à la règle et au compas l'angle $2\pi/3$, on saurait construire le polygone régulier à 9 côtés à partir de celui à 3 côtés. Donc, trisecter un angle est en général impossible. On voit ainsi la relation entre la construction des polygones réguliers à la règle et au compas et le problème de la trisection d'un angle. On reviendra plus loin sur cette question. Notons que dans toute cette discussion sur les constructions à la règle et au compas, il s'agit d'une règle *non graduée*. On sait, par exemple, que l'on peut trisecter un angle quelconque à l'aide d'une règle graduée.

AB (cela fait trois opérations) ; puis on joint A et ensuite B par un segment à l'un des points d'intersection des deux cercles, ce qui fait au total cinq opérations (voir figure 2).

Cette définition du degré de scibilité est sans doute la plus naturelle, et elle présente l'avantage de pouvoir se généraliser, comme une notion de « complexité », à des situations diverses, notamment à des situations en musique théorique, auxquelles on s'intéresse plus loin dans cet article.

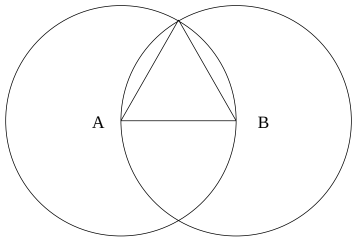

Fig. 2 – Construction à la règle et au compas d'un triangle équilatéral à partir d'un segment AB.

Rappelons que tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle, et qu'il est circonscriptible à un autre, de même centre. Le problème de la construction à la règle et au compas d'un côté du polygone régulier à n côtés dont le cercle circonscrit est donné est équivalent à celui de construire, à la règle et au compas, un arc de cercle dont la longueur est la n-ième partie du périmètre du cercle.[4]

Ceci nous mène à d'autres définitions du degré de scibilité d'un polygone régulier, notamment comme le nombre minimum d'opérations pour déterminer un côté d'un tel polygone comme une corde du cercle circonscrit à ce polygone. Par exemple, il suffit d'une seule opération pour tracer le diamètre d'un cercle (le diamètre étant considéré comme un polygone régulier à deux côtés) : on trace à la règle une ligne passant par le centre du cercle. De même, il suffit d'une opération pour construire le côté d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle : à l'aide du compas, et avec le même rayon que celui du cercle, on découpe sur le cercle un arc dont la longueur de la corde est égale au rayon du cercle. Pour un triangle équilatéral, on peut partir de l'hexagone régulier et en joindre un sommet sur deux. On peut aussi partir du côté de l'hexagone régulier et en prendre la médiatrice ; elle coupe le cercle en un point d'où l'on peut déterminer le côté du dodécagone régulier.

Concernant le degré de scibilité des polygones réguliers, Kepler introduit d'autres définitions, qui sont reliées à celle que l'on vient de mentionner, et que l'on va passer en revue. Il serait intéressant d'établir des relations précises entre les différentes notions de degré de scibilité.

Notons d'abord que le fait qu'un polygone régulier soit constructible à la règle et au compas permet d'exprimer par des formules explicites des valeurs telles que la longueur d'un côté de ce polygone, l'aire de ce polygone, les longueurs de ses diverses diagonales, etc. en fonction de la longueur du diamètre du cercle circonscrit (ou de celui du cercle inscrit). Kepler suggère cela dans la définition VII du Livre I de l'*Harmonie du monde* sous la forme suivante : « *connaître une figure, en géométrie, c'est pouvoir la mesurer à l'aide d'une mesure connue, et dans le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de figures*

[4]Pour revenir à nos Anciens, on peut mentionner ici que le Livre IV des *Eléments* d'Euclide concerne la construction des polygones réguliers à 3, 4, 5, 6 et 15 côtés inscrits dans un cercle.

inscrites dans un cercle, la mesure en question est le diamètre du cercle. »

A partir de cette idée, on peut proposer plusieurs définitions possibles du degré de scibilité d'un polygone régulier constructible. Par exemple, on peut définir ce degré comme une « complexité » de l'expression de la longueur d'un côté, ou bien celle de l'aire de ce polygone, en fonction du rayon du cercle circonscrit (ou bien de celui du cercle inscrit). Il faut maintenant définir précisément ce que l'on entend par complexité de l'expression.

La longueur et l'aire d'un polygone régulier constructible à la règle et au compas sont exprimables, en termes du rayon du cercle circonscrit (et de celui du cercle inscrit), par des fonctions qui font intervenir des fonctions rationnelles (addition, soustraction, multiplication et soustraction), ainsi que des opérations d'extraction de racine carrée. Cela découle d'une propriété commune à toutes les figures constructibles. En effet, une droite est décrite en coordonnées par une équation du premier degré, et un cercle par une équation du second degré, et les opérations que l'on se permet dans les constructions à la règle et au compas sont de deux types : (1) construction d'un cercle de centre donné et passant par un point donné ; (2) construction d'une droite passant par deux points donnés. Les points donnés sont ou bien des points dont on est parti au début de la contruction, ou bien des points obtenus par intersection d'une droite ou d'un cercle que l'on a déjà contruits. Une opération d'intersection de droite et de cercle, ou d'intersection de deux droites ou de deux cercles, se traduit donc par la recherche d'une solution à une équation du premier ou du second degré, c'est-à-dire par la combinaison d'une fonction rationnelle avec une extraction de racine carrée.

En réalité, le fait qu'un certain segment soit constructible à la règle et au compas est équivalent au fait que l'expression de la longueur de ce segment est obtenue par des opérations rationnelles combinées avec des opérations d'extraction de racines carrées.

En considérant que les opérations rationnelles sont « triviales » en terme de complexité, on peut alors définir le degré de scibilité d'un polygone constructible comme le nombre minimum d'opérations d'extraction de racine carrées nécessaire pour exprimer par une formule la longueur du côté (ou l'aire) de ce polygone. Une façon concise de dire cela est d'utiliser la notion de degré algébrique d'un nombre. On rappelle que les nombres algébriques sont ceux qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, et que le degré d'un nombre algébrique est le degré minimum d'une équation polynomiale qui lui est associée. On n'entrera pas ici dans les détails de la théorie des nombres algébriques, par souci de rester élémentaire, sauf pour dire que la discussion précédente montre que le degré algébrique d'une quantité du type que l'on a considéré (longueur d'un côté, aire, ou longueur d'une diagonale d'un polygone constructible) est une puissance de 2. Notons au passage que l'on voit ainsi que le problème de Delos, c'est-à-dire celui de la duplication du volume d'un cube n'a pas de solution constructible à la règle et au compas, car il est équivalent à la construction de $\sqrt[3]{2}$, qui est de degré 3, et 3 n'est pas une puissance de 2 (cf. aussi la note 3 en bas de page ci-dessus). De même, il est bien connu que la trisection d'un angle, en toute généralité, n'est pas possible à la règle et au compas, car pour certaines valeurs particulières de l'angle, elle est équivalente à la construction de grandeurs de degré trois.

Rappelons aussi que les expressions du rayon du cercle circonscrit et du cercle inscrit à un polygone régulier (que l'on appelle respectivement *rayon* du polygone et *apothème* du polygone), sont étudiées dans les *Eléments* d'Euclide, où il y est montré comment on les calcule, dans le cas de tous les polygones réguliers constructibles connus. On y montre par ailleurs comment calculer des quantités analogues pour les polyèdres réguliers tri-dimensionnels.

On utilisera dans ce qui suit les expressions des longueurs des côtés et des aires d'un polygone régulier en fonction du rayon du polygone, plutôt que de son apothème. Il est facile de passer d'une formule exprimant la longueur du côté en fonction du rayon à une autre exprimant cette longueur en fonction de l'apothème. En effet, si r, a et c désignent respectivement le rayon, l'apothème et la longueur du côté, on a, par le théorème de Pythagore, $r^2 = (c/2)^2 + a^2$, puisque a est la distance du centre du cercle (inscrit ou circonscrit) au milieu d'un côté du polygone et r la distance de ce centre à l'un de ses sommets.

A la fin du Livre I de l'*Harmonie du Monde*, Kepler établit deux listes distinctes pour le degré de scibilité (Propositions XLVIII et L). Ces listes se rapportent à la définition de la scibilité comme degré de complexité de la formule qui exprime la longueur d'un côté et celle de l'aire, en fonction du rayon du polygone. Le classement (par degré croissant) du degré de scibilité de la longueur d'un côté est alors comme suit : (1) le diamètre (considéré comme un polygone régulier à deux côtés) ; (2) l'hexagone ; (3) le carré et le triangle ; (4) le dodécagone et le décagone ; (5) le pentagone et l'octogone.

Le classement (toujours par degré croissant) en fonction de la scibilité de l'aire est comme suit : (1) Le diamètre ; (2) le carré et le dodécagone ; (3) le triangle, l'hexagone et l'octogone ; (4) le pentagone et le décagone.

Pour comprendre ces classements, on a réuni dans la table 1 les formules exprimant les longueurs des côtés et les aires des polygones concernés.

Polygone	Longueur d'un côté	Aire
Diamètre	2	0
Triangle	$\sqrt{3}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$
Carré	$\sqrt{2}$	2
Pentagone	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{5}{4}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$
Hexagone	1	$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$
Octogone	$\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$
Décagone	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$
Dodécagone	$\sqrt{2}-1$	3

Tab. 1 – Longueur d'un côté et aire de quelques polygones réguliers convexes de rayon égal à 1.

Remarque. — Pour simplifier, on s'est contenté de parler ici des polygones réguliers convexes, alors que l'étude faite par Kepler, et les listes qu'il a établies, concernent aussi les polygones étoilés. Cette remarque est importante, parce que Kepler est considéré comme le premier mathématicien à avoir dégagé la notion de polygone étoilé. Il est aussi le premier à avoir étudié la construction à la règle et au compas des polygones réguliers étoilés en même temps que celle des polygones réguliers convexes.

Passons maintenant au degré de congruence.

La notion de degré de congruence est intéressante en tant que nouvel exemple de « degré d'harmonie », au sens où Kepler l'entend dans son *Harmonie du Monde*,[5] un exemple qui fournit un parallèle supplémentaire entre les constructions géométriques et les constructions d'intervalles musicaux.

Le degré de congruence est relié à la notion de pavage. Dans les lignes qui vont suivre sur les pavages, on va se limiter à la considération de pavés ayant la forme de polygones réguliers. Il est bien connu que dans ce cas, et si on ne permet que des pavés isométriques, on ne peut paver le plan qu'avec trois types de polygones réguliers : le triangle équilatréral, le carré et l'hexagone régulier (c'est la proposition XVIII du livre II de l'*Harmonie du Monde*). Kepler considère cependant des pavages avec plusieurs sortes de pavés. Les propositions XIX à XXI du livre II concernent les pavages du plan utilisant respectivement 2, 3, 4 et 5 types de pavés. Dans les proposition XXIII à XXVIII du même livre, Kepler considère la question de paver une partie du plan, ainsi que celle des pavages de surfaces dans l'espace tri-dimensionnel.

Le degré de congruence d'un polygone est une mesure des différentes possibilités pour ce polygone de s'associer avec d'autres polygones pour former un pavage d'une surface. Cette définition heuristique n'est pas pratique à utiliser telle quelle[6], mais elle est suffisante pour que Kepler puisse donner un tableau des premiers polygones réguliers en termes de leur degré de congruence.

Là aussi (comme pour le degré de scibilité), Kepler donne deux listes différentes. La première concerne les pavages plans, et elle comprend 12 degrés. La liste des polygones classés suivant leur degré de congruence est : (1) hexagone ; (2) carré ; (3) triangle ; (4) dodécagone ; (5) dodécagone étoilé ; (6) octogone ; (7) octogone étoilé ; (8) pentagone ; (9) pentagone étoilé ; (10) décagone ; (11) décagone étoilé ; (12) icosagone.

La deuxième liste concerne le degré de congruence par rapport aux pavages d'une sphère dans l'espace tri-dimensionnel. La liste est la suivante : (1) triangle et carré ; (2) pentagone et son étoile ; (3) hexagone ; (4) octogone, décagone et leurs étoiles ; (5) dodécagone et son étoile ; (6) icosagone.

On peut faire quelques remarques qui aident à comprendre ces deux listes.

Les trois premiers éléments de la première liste sont les trois polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan, par un pavage dont tous les pavés sont isométriques. Le degré de congruence de ces polygones est dans l'ordre indiqué, parce que, dans un pavage du plan par des triangles équilatéraux, en chaque sommet, il y a 6 polygones qui aboutissent, tandis que pour un pavage par des carrés, il y a, en chaque sommet, 4 polygones qui aboutissent, et pour un pavage par des hexagones réguliers il y en a trois. Ainsi, en un

[5]Rappelons en passant que le mot grec pour la consonance musicale est « armonia », et qu'étymologiquement, ce mot a le sens de « fondre en un seul ».

[6]Je pense que la question de trouver une définition précise du degré de congruence et de développer une telle notion est une question mathématique très intéressante.

certain sens, un hexagone a besoin de s'associer avec moins de pavés qu'un carré, et un carré a besoin de s'associer avec moins de pavés qu'un triangle. Cela fait qu'il est « plus facile » de paver le plan avec des hexagones qu'avec des carrés, et encore plus facile qu'avec des triangles. D'où la classification donnée de ces trois polygones en fonction de leur degré de congruence.

Dans la seconde liste, le triangle et le carré apparaissent avec le même degré, parce que chacun de ces polygones détermine un pavage régulier du bord d'une sphère (le tétraèdre et le cube respectivement), avec le même nombre de polygones voisins en chaque sommet.

La question de savoir quelles surfaces (planes ou non) sont pavables en utilisant un certain nombre fini donné de classes d'isométrie de pavés est abordée par Kepler dans l'*Harmonie du Monde*. Aujourd'hui encore elle n'est pas résolue en toute généralité et elle a été l'objet de recherches intenses dans les dernières décennies.

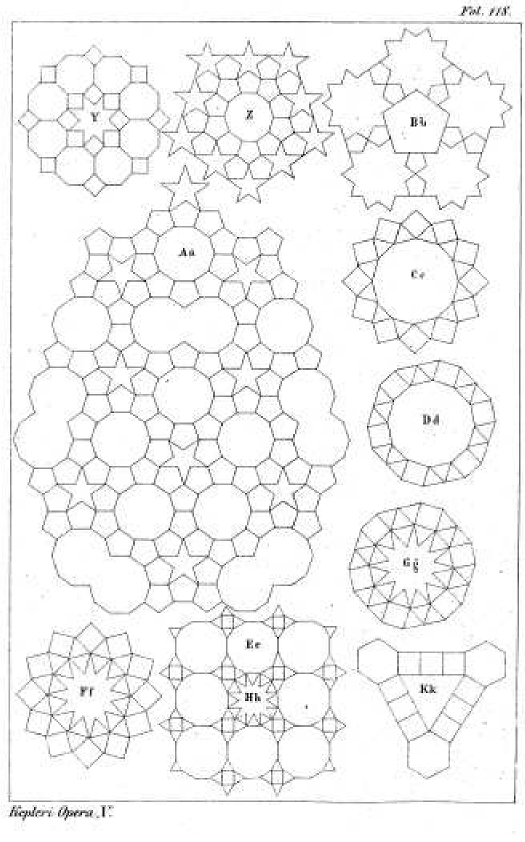

Fig. 3 – Pavages à pavés multiples, extrait de l'*Harmonices Mundi*.

Comme je l'ai déjà dit, l'*Harmonie du Monde* contient une partie mathématique extrêmement intéressante. Il faut cependant ajouter que le fait de parler de la partie mathématique de ce traité, sans faire la relation avec le reste de l'ouvrage, ne rend pas compte de toute la valeur du traité. On peut par exemple mentionner ici que les considérations de Kepler sur le degré de congruence des polygones sont utilisées dans la partie astrologique de l'*Harmonie du Monde*, le terme « astrologie » faisant référence ici à l'étude de certaines divisions régulières du cercle du zodiaque et à l'observation de certaines configurations sur la voûte céleste, étude qui est comparable en certains points à celle des pavages de la sphère. Tout cela est bien sûr en rapport avec le thème principal de Kepler dans ce traité, qui est que le monde est bâti suivant des lois rationnelles dont les modèles se trouvent dans la géométrie abstraite.

Les degrés de scibilité et de congruence sont tous deux des « degrés d'harmonie ». A ce propos, on peut signaler que dans l'introduction au Livre II de l'*Harmonie du Monde*, Kepler rappelle que les mots latin *congruencia* et grec *harmonia* ont le même sens.

Je vais parler dans la suite de cet article de la relation de ces degrés d'harmonie avec la consonance des intervalles musicaux. On peut rappeler ici que des tentatives de définition de « degré de consonance » remontent à l'antiquité grecque. Par exemple, Porphyre, dans ses *Commentaires sur l'Harmonique de* Ptolémée, rapporte que « *certains Pythagoriciens, après avoir établi les rapports de consonance, établissaient entre eux des comparaisons, afin de mettre en évidence ceux qui étaient les mieux consonants ...* »([8] p. 529). Diverses définitions du degré de consonance jalonnent les 26 siècles qui nous séparent de l'antiquité grecque (voir mon rapport dans [7]).

2. Degrés de complexité des intervalles musicaux

L'algorithme usuel pour construire une gamme musicale dont l'étendue est d'une octave consiste à partir d'un certain nombre de consonances (par exemple des quintes et des quartes), de construire de nouvelles notes en enchaînant ces consonances, et ensuite de ramener les notes obtenues dans le domaine de l'octave initiale, en retranchant à chacune de ces notes le nombre nécessaire d'octaves. Comme exemple précis, on va rappeler brièvement comment on construit la gamme de Pythagore.

Cette gamme étant une forme particulière de la gamme diatonique utilisée dans notre musique occidentale, on peut désigner ses éléments par les mots Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si et Do (que l'on notera Do_1, pour distinguer cette note du Do initial de la suite, qui est plus grave et qui en diffère d'une octave). Ces notes seront définies par les valeurs numériques des intervalles qu'elles forment avec la note Do.

On part des valeurs de trois intervalles de base, l'octave, la quinte et le quarte, qui sont respectivement $2/1$, $3/2$ et $4/3$. On inclut dans cette gamme (après avoir posé la note initiale, c'est-à-dire le Do) les notes correspondant à ces trois intervalles de base, c'est-à-dire les notes Do_1, Sol et Fa. Les quatre notes ainsi obtenues sont considérées comme ayant la complexité zéro. Le reste des notes de la gamme est obtenu en faisant des opérations de concaténation (addition et soustraction) à partir de ces intervalles de base. On définit alors la complexité d'une note quelconque de la gamme comme le nombre minimum d'opérations nécessaires à la construire.

La valeur numérique de l'intervalle Do-Ré est $9/8$. On obtient cet intervalle en retranchant une quarte à une quinte (on a $3/2 \div 4/3 = 9/8$). Une seule opération a été nécessaire, et la complexité du Ré est donc égale à 1.

La valeur numérique de l'intervalle Do-La est $27/16$. On peut obtenir le La en partant du Ré (qui a déjà été construit) et en lui ajoutant une quinte (on a bien $9/8 \times 3/2 = 27/16$). On a utilisé deux opérations, et on ne peut pas en utiliser moins. La complexité du La est donc égale à 2.

La valeur numérique de l'intervalle Do-Mi est 81/64. On obtient cet intervalle en partant du La (qui a déjà été construit) et en lui retranchant une quarte (on a $27/16 \div 4/3 = 81/64$). La complexité du Mi est égale à 3.

Enfin, la valeur numérique du Si est 243/128. On obtient le Si en partant du Mi (qui a déjà été construit) et en lui ajoutant une quarte. La complexité du Si est égale à 4.

Ces données sont rassemblées dans le tableau 2.

Notons que cette façon de définir les notes de la gamme de Pythagore n'est pas la façon usuelle (qui consiste, après avoir placé les notes Do, Do_1, Sol et Fa, à prendre des quintes itérées, et à diviser la valeur de l'intervalle obtenu par des multiples de 2 pour que la valeur de l'intervalle final soit comprise entre 1 et 2) ; le nombre d'opérations nécessaires par l'algorithme usuel n'est pas le minimum nécessaire.

Note	Valeur numérique	Complexité
Do	1/1	0
Ré	9/8	1
Mi	81/64	3
Fa	4/3	0
Sol	3/2	0
La	27/16	2
Si	243/128	4
Do_1	2/1	0

Tab. 2 – Tableau des valeurs des intervalles de la gamme de Pythagore, et complexité de ces intervalles. Rappelons que la lyre à 7 cordes de l'antiquité grecque était parfois accordée suivant les 7 premières notes de la gamme de Pythagore.

3. Analogies entre le degré de scibilité des polygones et le degré de consonance des intervalles musicaux

Il s'agit de pures analogies, mais il est bien connu que les mathématiciens aiment les analogies. C'est à partir d'analogies, qui s'appuient parfois sur très peu de choses, que nous formulons des conjectures.

Les opérations que l'on fait dans la construction usuelle d'une gamme consiste à partir d'un certain nombre (généralement très petit) de fractions de la forme p/q avec p et q entiers et $p > q$, d'en prendre des produits, et de diviser le résultat par la plus petite puissance de 2 pour laquelle le résultat final se trouve compris entre 1 et 2.

Il y a déjà une analogie entre ces divisions successives par des puissances de 2 et l'opération d'itérer l'opération d'extraction de racines carrées, que l'on utilise dans les formules liées aux constructions des polygones réguliers à l'aide de la règle et du compas (cf. §1 ci-dessus).

Comme on l'a déjà rappelé ci-dessus, le fait de multiplier la valeur numérique d'un intervalle musical par 2^n (n étant un entier positif) correspond à l'ajout de n octaves à cet intervalle, et si l'intervalle initial est consonant, l'intervalle qui en résulte est aussi considéré comme consonant.[7]

Passons de nouveau au contexte des polygones réguliers.

Si un polygone régulier à p côtés est constructible, on sait que pour tout entier $n \geq 1$, le polygone régulier à $2^n p$ côtés est constructible, et inversement, si un polygone régulier à p côtés est constructible, on peut diviser l'entier p par autant de multiples de 2 que l'on peut (pourvu que le résultat soit encore un entier) et rester dans la catégorie des polygones constructibles. Ceci est une autre manière de voir que dans le cas des polygones constructibles, comme dans le cas des intervalles consonants, la multiplication/division par des puissances de 2 joue des rôles comparables.

On peut dire des choses plus précises à ce sujet. Construire un polygone régulier convexe à $2n$ côtés à partir d'un polygone régulier convexe à n côtés inscrit dans un cercle donné requiert une étape supplémentaire : tracer les médiatrices des côtés, et en prendre l'intersection avec le cercle circonscrit, ce qui détermine les sommets des côtés du nouveau polygone régulier. Parallèlement, il existe une formule simple qui relie la longueur d'un côté d'un polygone convexe régulier à celle d'un côté d'un polygone de même rayon et ayant un nombre double de côtés, c'est

$$c_{n+1} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c_n^2}{4}}\right)}.$$

Ici, pour $n \geq 2$, c_n désigne la longueur d'un côté d'un polygone convexe régulier à n côtés, d'un rayon fixé R.

Par exemple, on peut déduire de cette formule, à partir de la longueur du côté d'un polygone régulier à deux côtés de rayon R, la longueur du carré de même rayon, celle de l'octogone de même rayon, celle du décahexagone de même rayon, et ainsi de suite (voir le tableau 3).

Polygone	Longueur d'un côté
Diamètre	$2R$
Carré	$R\sqrt{2}$
Octogone	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
Décahexagone	$R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

TAB. 3 – Longueurs des côtés de polygones réguliers convexes de rayon égal à R, obtenus l'un à partir de l'autre en doublant le nombre de côtés.

Ainsi, que l'on utilise l'une ou l'autre des définitions du degré de scibilité, on voit qu'il existe une relation simple entre le degré de scibilité d'un polygone régulier à p côtés, et

[7]Ceci l'était déjà par les musicologues de l'antiquité, « tant que le son peut être produit et est perceptible à l'oreille », cf. [10] p. 87).

celui d'un polygone à $2^n \times p$ côtés, avec n quelconque ≥ 1. Ceci est à mettre en parallèle entre le fait qu'il existe une relation simple entre le degré de consonance d'un intervalle musical de valeur numérique donnée p/q et celui obtenu par addition de n octaves à cet intervalle dont la valeur numérique est donc de $2^n \times p/q$.[8]

Voici une autre analogie formelle, qui a trait à la théorie des gammes. Commençons par citer Euler. Dans son mémoire intitulé *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues en musique* (1764), Euler rapporte que jusqu'à son époque, la construction des gammes musicales utilisait uniquement les fractions dont les numérateurs et les dénominateurs sont des entiers dont la décomposition en facteurs premiers fait intervenir les nombres 2, 3 et 5, et uniquement ceux-là.[9] Euler propose à ce sujet une nouvelle théorie (c'est la « conjecture » annoncée dans le titre du mémoire) dans laquelle le nombre 7 est inclus comme nouveau facteur premier, ceci, dit-il, afin d'obtenir « un nouveau genre de musique qui était inconnu aux anciens » ([2], Ser. III Vol. I, p. 515). Tournons-nous maintenant vers les polygones réguliers. Il se trouve que jusqu'à la période de Kepler (et même bien au-delà), les seuls polygones que l'on connaissait être constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côtés est de la forme 2^n, $2^n \times 3$, $2^n \times 5$ et $2^n \times 3 \times 5$, avec n entier positif. On retrouve donc la même liste de nombres de base, 2, 3 et 5. Il aura fallu attendre 200 ans après Kepler pour avoir la construction, par Gauss, de nouveaux polygones réguliers (le premier ayant 17 côtés, le suivant ayant 257 côtés, etc.).[10]

Cette analogie devient moins formelle si on la relie à une autre analogie, faite par Kepler lui-même, et à laquelle il consacre plusieurs pages de l'*Harmonie du monde* (en particulier tout le chapitre 1 du Livre III, intitulé *Sur les causes de la consonance*), et qui est basée sur l'observation pratique du fait que la division du cercle par les sommets des polygones inscrits constructibles à la règle et au compas fait intervenir les mêmes nombres entiers que ceux qui interviennent comme valeurs numériques des consonances. Par exemple, le diamètre (considéré, comme on l'a dit, comme un polygone régulier à deux côtés) divise le cercle en deux arcs de longueurs égales, et le rapport du périmètre du cercle sur la longueur de chacun de ces arcs est de 2/1, qui est la valeur numérique de l'octave. Pour le triangle équilatéral (polygone régulier à trois côtés), les rapports entre le périmètre du cercle et les longueurs des arcs que l'on obtient sont 3/1 (qui est la valeur numérique de la douzième) et 3/2 (valeur de la quinte). Le polygone constructible suivant est le carré, qui donne les rapports 4/1 (double octave), 4/2=2/1 (octave) et 4/3 (quarte), et ainsi de suite. Tout cela peut être mis en relation avec la division des cordes vibrantes, bien sûr de façon purement abstraite, le cercle étant difficilement réalisable comme une corde tendue que l'on pourrait faire vibrer. Mais on peut au moins faire l'analogie du point de

[8] Le degré de consonance peut être défini utilisant la notion de complexité, introduite ci-dessus.

[9] On peut rappeler à ce sujet que les intervalles musicaux utilisés par les *musici* de la renaissance, tels que Gioseffo Zarlino, étaient les suivants : 2/1 (octave), 3/2 (quinte), 4/3 (quarte), 5/4(tierce majeure), 6/5 (tierce mineure), 9/8 (ton majeur), 10/9 (ton mineur), 16/15 (demi-ton diatonique), 25/24 (demi-ton chromatique) et 81/84 (comma de Didyme). Ces nombres sont exactement les fractions superparticulières (c'est-à-dire de la forme $(n+1)/n$) dont les numérateurs et les dénominateurs sont des multiples de 2, 3 et 5.

[10] On peut rappeler ici que le résultat de Gauss dit qu'un polygone régulier peut être construit à la règle et au compas quand son nombre de côtés est de la forme $2^m p_1 \ldots p_k$ où les p_j sont des nombres premiers différents de la forme $p = 2^{2^a} + 1$, avec $a = 0, 1, 2, \ldots$ un entier naturel ($p = 3, 5, 17, 257, 65537$). Les polygones constructibles sont donc obtenus pour $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \ldots$ et non constructibles pour $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \ldots$

vue théorique, et c'était probablement l'intention de Kepler.

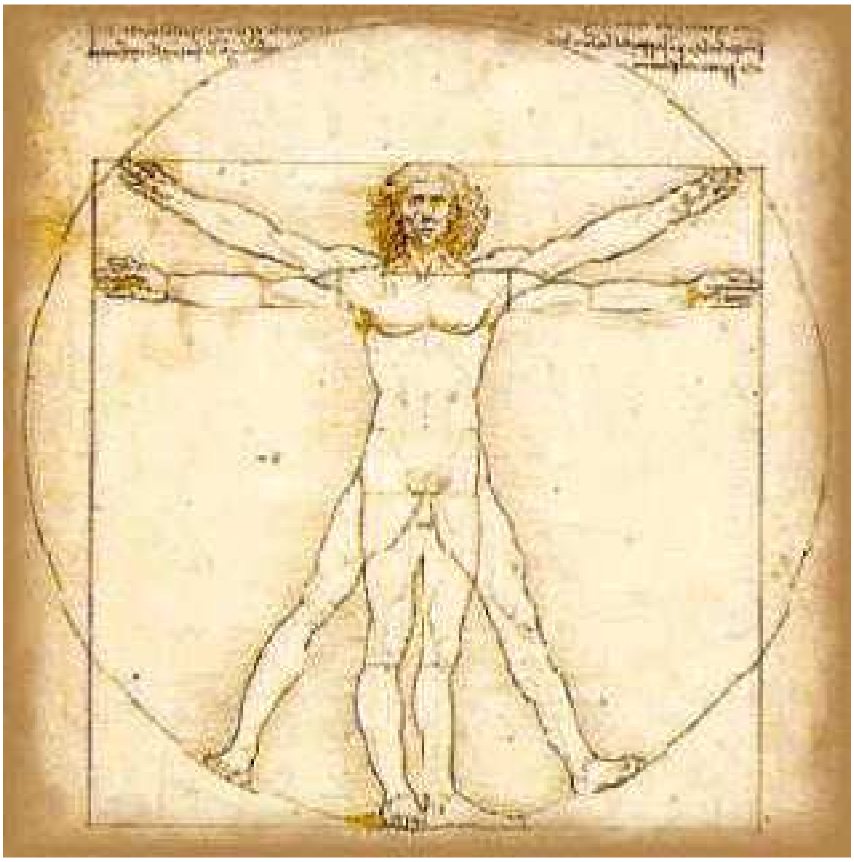

Fig. 4 – Dessin du corps humain par Leonard de Vinci (Galleria dell'Accademia, Venise), Les proportions utilisées sont celles indiquées par Vitruve, l'archirecte romain du 1er siècle après J. C., qui lui-même dans ses écrits perpétuait la tradition des artistes et architectes grecs qui l'ont précédé.

Enfin, il y a une analogie que j'ai déjà mentionnée dans l'article [7]. Elle s'appuie sur les deux faits suivants, que je considère comme des acquis de notre tradition esthétique (pour la première) et sensorielle (pour la seconde) :

> (1) Nous sommes particulièrement sensibles à la beauté des proportions qui sont constructibles à la règle et au compas.
>
> (2) La justesse d'un dessin représentant une figure constructible à la règle et au compas peut être reconnue à l'œil nu avec un très grand degré de précision.

Pour la première affirmation, je renvoie aux dessins des artistes de la renaissance, tel le célèbre « Homme de Vitruve » (1490) de Leonard de Vinci (cf. figure 4), ou les dessins de Dürer, de Luca Pacioli (cf. figure 5) et d'autres.

La raison de la validité de (2) est que nous sommes capables de construire mentalement des cercles et des droites, et comparer avec ce que l'on voit. C'est pour cela que nous

Fig. 5 – Tableau de Jacopo de Barbari (Musée de Naples), représentant Luca Pacioli en train de construire une figure à la règle et au compas. Luca Pacioli est un matématicien italien du 15e siècle, auteur d'une *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni, et Proportionalita* (publiée à Venise en 1494) et d'une édition des Eléments d'Euclide. Ami et collaborateur de Leonard de Vinci, il a écrit un traité intitulé *De Divina Proportione* (publié à Venise, 1509), pour lequel Leonard da Vinci a dessiné les figures. Le sous-titre de cet ouvrage nous dit que c'est une « *oeuvre nécessaire à tous les esprits perspicaces et curieux, où chacun de ceux qui aiment à étudier la Philosophie, la Perspective, la Peinture , la Sculpture, l'Architecture, la Musique et les autres disciplines mathématiques, trouvera une très délicate, subtile et admirable doctrine et se délectera de diverses questions touchant à une très secrète science* ». Dans le chapitre III de l'ouvrage, l'auteur écrit : « *Pour notre propos, par sciences et disciplines mathématiques, nous entendons Arithmétique, Géométrie, Astrologie, Musique, Perspective, Architecture et Cosmographie ainsi que toutes les sciences qui en dépendent* ».

sommes particulièrement sensibles à la justesse des dessins qui comportent des symétries (la symétrie étant une propriété que l'on peut vérifier au compas), ou dont la structure contient des cercles ou des rapports simples (égalité, rapport double, triple, etc.) et plus généralement des rapports constructibles à la règle et au compas (moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques, proportion dorée, etc.).

Revenons maintenant aux intervalles musicaux.

Les affirmations (1) et (2) ont leur équivalent en musique.

Pour la première affirmation, je rappelle simplement que pendant 2500 ans, l'utilisation juste des consonances, en partant de celles qui sont définies par les proportions simples, et leur combinaison avec les dissonances, étaient à la base des théories et des traités de composition musicale. Tous les traités théoriques et tous les écrits sur l'esthétique musicale, depuis la période grecque du VIe siècle avant J. C. et jusqu'aux écrits théoriques de J.-Ph. Rameau, sont basés sur cette évidence. Pour des références concernant ce sujet, je renvoie aux ouvrages mentionnés dans mon article [7].

En ce qui concerne la seconde affirmation, il est bien connu que l'oreille humaine est particulièrement sensible à la justesse des intervalles consonants (en particulier, les consonances pythagoriciennes : l'unisson, l'octave, la quinte et la quarte). En d'autres termes, une oreille humaine normale sait reconnaître avec une très grande précision si un tel intervalle est juste ou pas. Par exemple, un violoniste, quand il accorde son instrument, commence par accorder une corde à vide (en général la deuxième corde), et il accorde ensuite les autres cordes en écoutant les doubles cordes à vide, qui font entre elles des intervalles consonants de quarte et de quinte. Il n'aurait pas pu accorder son violon de cette manière si les intervalles formés par les cordes à vide adjacentes n'étaient pas des consonances simples. De même, l'accordeur d'un clavecin utilise un algorithme qui consiste à écouter (« à l'oreille nu ») des intervalles consonants (des unissons, des octaves, des quintes et des quartes). Il lui est difficile en général d'accorder avec une très grande précision l'intervalle formé par deux notes adjacentes (un ton ou un demi-ton).

Je mentionne pour conclure que ces analogies nous fournissent une explication possible au texte de Jamblique que j'ai cité au début de cet article : « *Alors que* Pythagore *était plongé dans la réflexion et dans le calcul, cherchant à découvrir quelqu'instrument qui apporterait à l'ouïe un secours solide et infaillible, comme dans le cas de la vue qui a le secours du compas, de la règle ou du dioptre, [...]* ». Je mentionne aussi que la relation entre consonance d'un intervalle et justesse de cet intervalle nous donne une explication à l'affirmation de Kepler dans le Livre III de son *Harmonie du Monde*, qui dit que l'harmonie d'un intervalle musical doit être jugée par l'oreille, et n'est pas seulement une affaire de rapports numériques.

Bibliographie

[1] G. D. Birkhoff, *Quelques Éléments Mathématiques de l'Art*, Att. Congr. Intern. di Matematica, Bologna, Vol. I, 315-333, 1929.

[2] L. Euler, Oeuvres Complètes (Opera Omnia), publié par l'Académie Suisse des Sciences, *éd. Teubner, Leipzig & Berlin*, (près de 80 volumes publiés à ce jour), 1911—

[3] R. Harshorne, Geometry : Euclid and Beyond, *Springer*, 1997.

[4] Jamblique, Vie de Pythagore, Introduction, traduction et notes par L. Brisson & A. Ph. Segonds, *éd. Belles Lettres*, 1996.

[5] J. Kepler, Oeuvres Complètes (Joannis Kepleri Opera Omnia), ed. Ch. Frisch, 8 volumes, *ed. Heyder & Zimmer, Frankfurt & Erlangen*, 1858-1878.

[6] A. Papadopoulos, *Mathematics and music theory : from Pythagoras to Rameau*, Math. Intelligencer **24 (1)**, 65-73, 2002.

[7] A. Papadopoulos, *Consonance musicale et complexité mathématique*, L'Ouvert, **112**, 47-68, 2005.

[8] Les Présocratiques, édition établie par J.-P. Dumont, textes traduits par J.-P. Dumont, *D. Delattre et J.-L. Poirier, Bibliothèque de la Pleiade, Gallimard, Paris*, 1988.

[9] G. Simon, Kepler astronome astrologue, *Gallimard, Paris*, 1979 (2ème édition 1992).

[10] Théon de Smyrne, Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon, *édition bilingue (grec-français) établie par J. Dupuis, Paris 1892, reprint par les éditions Culture et Civilisation, 115 Av. Gabriel Lebon, Bruxelles* 1966.

[11] I. Thomas, Selections illustrating the history of greek mathematics, 2 volumes, *ed. W. Heinemann Ltd. & Harvard University press, Loeb Classical Library*, 1939 (plusieurs éditions ultérieures).

Athanase Papadopoulos
IRMA
Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg
papadop@math.u-strasbg.fr